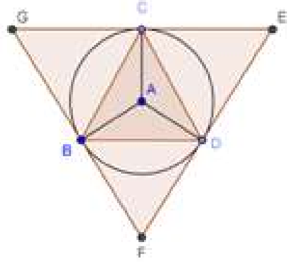
CAPITULO I. Concepto de Límite

En la siguiente sección, estudiaremos un problema que hace evidente la necesidad de definir con precisión el concepto de límite, que como veremos busca darle formalidad a ideas intuitivas conocidas.

A. Un problema clásico

El número π tiene un significado trascendental en la matemática. Utilizamos constantemente su significado. Para dar una estimación de su valor, podemos hacer el siguiente análisis.

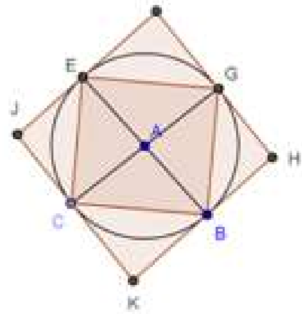
EJEMPLO 1. Utilizando polígonos regulares inscritos y circunscritos a un círculo de radio 1 para dar aproximaciones del valor de π.



En general, denotaremos con I_n el área del polígono inscrito, y con C_n el área del polígono circunscrito, y con π el área del círculo que estamos trabajando.

Notemos que al inscribir y circunscribir triángulos equiláteros en un círculo de radio 1, tenemos una situación como la mostrada en la figura, donde tenemos $I_3 = (CBD)$ y $C_3 = (GEF)$.

Un cálculo utilizando triángulos especiales o trigonometría elemental nos dice que $I_3 = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1,29$ y $C_3 = 3\sqrt{3} \approx 5,19$, por lo que podemos estimar que $1,29 < \pi < 5,19$, pero estamos lejos de una aproximación que nos diga algo significativo.

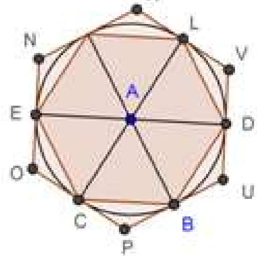


Ahora, utilizaremos cuadrados en vez de triángulos.

Haciendo los cálculos tenemos que $I_4 = 2$ y $C_4 = 4$.

Entonces, tenemos que $2 < \pi < 4$, y notamos que hemos mejorado la aproximación.

De una manera similar, procedemos con hexágonos. Note que el área del triángulo ΔABC se puede calcular utilizando la fórmula $(ABC) = \frac{AB \cdot AC \cdot \operatorname{sen} A}{2}$ y nos da



$(ABC) = \frac{1 \cdot 1 \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ y al multiplicar por 6 , $I_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,59$.

Para C_6, note que $AP = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $(ABU) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y $C_6 = 2\sqrt{3} \approx 3,46$.

Por lo tanto, tenemos que $2,59 < \pi < 3,46$ y esta es una mejor aproximación.

Podemos generalizar algunas ideas en el problema.

Primero, entre más grande es el valor de n, entonces, I_n va aumentando, mientras que C_n va disminuyendo. Además, es esperable que para valores muy grandes de n las áreas de esos polígonos se van acercando mucho, y justamente al valor que esperamos de π.

Esto es cierto, pero surge la pregunta, ¿qué es exactamente π? Una manera de contestarla, es decir que es el valor al cual se acercan las áreas I_n y C_n, cuando n va hacia infinito. Este concepto de ir hacia infinito, es justamente uno de los enfoques que busca aclarar el concepto de límite, como veremos más adelante.

Ejercicio A.

Con base en el ejemplo anterior:

1. Muestre que $I_n = \dfrac{n \operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}{2}$ y $C_n = n \cdot \tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.

2. Complete la siguiente tabla utilizando calculadoras o computadoras.

n	I_n	C_n
3		
4		
5		
6		
10		
20		
30		
40		
50		
100		
1000		
10000		

3. Utilice la tabla para dar una aproximación de π con dos decimales.

4. Encuentre el menor valor de n que se necesita para aproximar π con cinco decimales, utilizando este método.

B. Estimación de Límites

Es conocido ya que dado una función existen valores para los cuales esta no está definida.

Por ejemplo, los valores que no están incluidos en su dominio máximo. El concepto de **límite** busca responder la siguiente pregunta: *¿A qué valor se acercan las imágenes de una función cuando sus preimágenes de acercan a un valor determinado?* En esta sección una calculadora nos ayudará a estimar límites.

Ejercicio Introductorio: Complete la siguiente tabla de valores para la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.9		2.1	
1.99		2.01	
1.999		2.001	
1.9999		2.0001	

Para valores de x un poco mayores que 2, ¿a qué valor se acerca $f(x)$?

Para valores de x un poco menores que 2, ¿a qué valor se acerca $f(x)$?

En general, si x se acerca a 2, ¿a qué valor se acerca $f(x)$?

¿Cuánto es $f(2)$?

La respuesta a la pregunta que busca averiguar un límite, es importante aún cuando la función está definida en ese valor determinado, pues podría dar información importante.

Es importante hacer preciso el significado de "acercarse al punto a". Esto significa que considerar una infinidad de puntos cada vez más cercados a a. La secuencia de valores $2{,}1$; $2{,}01$; $2{,}001$; $2{,}0001$ como en el ejemplo anterior, es una secuencia que se acerca a 2. Como no podemos considerar una cantidad infinita de puntos, sino que lo que haremos en general es considerar algunos hasta ver un patrón. Esto nos dará una idea clara de cuál sería el **límite de la función** en ese punto.

En general, cuando decimos acercarnos esto podríamos hacerlo tomando valores un poquito menores y cada vez más cercanos o un poco mayores y cada vez más cercanos. En el primer caso, como en la columna izquierda del ejemplo diremos que nos acercamos por la izquierda, mientras que en el segundo nos acercamos por la derecha.

EJEMPLO 2. Utilizando una tabla con al menos 4 valores, estime el límite de la función $f(x)=\dfrac{4x^2-4}{x-1}$ cuando x se acerca a 1 por la derecha.

> **NOTACIÓN:** Si la función $f(x)$ se acerca al valor l cuando x se acerca a a por la derecha, escribimos:
>
> $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$ (note que el + pequeño indica que es a la derecha de a y no un signo)

EJEMPLO 3. Escriba el límite del ejemplo anterior usando la notación correcta.

EJEMPLO 4. Utilizando una tabla con al menos 4 valores, estime el límite de la función $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}$ cuando x se acerca a -1 por la izquierda.

> **NOTACIÓN:** Si la función $f(x)$ se acerca al valor l cuando x se acerca a a por la izquierda, escribimos:
>
> $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l$ (note que el - pequeño indica que es a la izquierda de a y no un signo)

EJEMPLO 5. Escriba el límite del ejemplo anterior usando la notación correcta.

Los limites por la izquierda y por la derecha vistos anteriormente, se conocen como **límites laterales.**

En una función los límites laterales pueden o no existir, y en caso de existir pueden o no ser iguales.

En caso de que ambos límites laterales existan, y sean iguales, decimos que el límite de la función en ese punto existe:

> Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$ y $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l$, entonces, decimos que el límite cuando x se acerca a a de la función $f(x)$ es l y se denota: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$.

- Una manera alternativa de decir que un valor se acerca a otro es decir "tiende", así, un límite se puede decir así: "f tiende a l cuando x tiende a a"

EJEMPLO 6. Estime en caso de existir, los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-18}{x-3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Soluciones B.

EJEMPLO 2. Utilizando una tabla con al menos 4 valores, estime el límite de la función $f(x)=\dfrac{4x^2-4}{x-1}$ cuando x se acerca a 1 por la derecha.

En la tabla hemos mostrado algunos posibles valores. Con base en el patrón observado podemos establecer que conforme x se acerca a 1 (utilizando valores mayores que 1), $f(x)$ se acerca a 8 con lo que podemos intuir que el límite pedido es 8

x	$f(x)$
$1,1$	$8,4$
$1,01$	$8,04$
$1,001$	$8,004$
$1,0001$	$8,0004$

EJEMPLO 3. Escriba el límite del ejemplo anterior usando la notación correcta.

Tenemos que $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4x^2-4}{x-1}=8$

EJEMPLO 4. Utilizando una tabla con al menos 4 valores, estime el límite de la función $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}$ cuando x se acerca a -1 por la izquierda.

En la tabla hemos mostrado algunos posibles valores. Con base en el patrón observado podemos establecer que conforme x se acerca a -1 (utilizando valores menores que -1), $f(x)$ se acerca a 3 con lo que podemos intuir que el límite pedido es 3

x	$f(x)$
$-1,1$	$3,31$
$-1,01$	$3,0301$
$-1,001$	$3,003001$
$-1,0001$	$3,00030001$

EJEMPLO 5. Escriba el límite del ejemplo anterior usando la notación correcta.

Tenemos que $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^3+1}{x+1}=3$

EJEMPLO 6. Estime en caso de existir, los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-18}{x-3}$$

Evaluando límites laterales con tablas de valores, tanto para el límite por la izquieda como para el límite por la derecha, podemos ver que $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-18}{x-3}=12$

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

En este caso, los límites laterales existen pero $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=1$ y $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=-1$, por lo que podemos establecer que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ no existe.

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

En este ejemplo tenemos la situación de que los diferentes valores de la expresión oscilan y no tienen ningún patrón, por lo que los límites laterales no existen, y entonces, el límite $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ tampoco existe.

Ejercicio B.

I PARTE: Estime los siguientes límites laterales

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x^2-6x}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-1}{x^2-1}$
3. $\lim\limits_{x\to -5^+} \dfrac{10x+50}{x^2-25}$
4. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{4x+1}{x+1}$
5. $\lim\limits_{x\to 4^+} \sqrt{\cos(\pi x)}$
6. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$
7. $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{\sqrt{2+x}}{x^2-4}$
8. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\tan x}{x}$
9. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\cos x-1}{x}$
10. $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{\cos(\pi x)-1}{x+2}$

II PARTE: Para los siguientes valores, estime en caso de existir los siguientes límites.

1. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x+8}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 2} \left(1+\sqrt{x+7}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$
4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{x-2}$
5. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x+2}$
6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{x-2}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\cos x}{x}$
8. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$
9. $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{-1}{x}}$
10. $\lim\limits_{x\to 3} \log\left(\dfrac{x^2-2x}{x}\right)$

III PARTE: Conteste las siguientes preguntas.

1. La estimación de límites mediante las tablas de valores no es un método que permita determinar con precisión un límite. Explique por qué.
2. Suponga que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = l$. ¿Se puede asegurar que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = l$?
3. Dibuje la gráfica de una función que cumpla $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$ y $f(1) = 2$.
4. Dibuje la gráfica de una función que cumpla $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -2$, y $f(1) = 1$.
5. Dibuje la gráfica de una función que cumpla $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$ y $f(1) = 2$.

C. Limites en Gráficas

Dada la gráfica de una función, es posible encontrar límites para diferentes valores. Esto se hace buscando los valores a los que se acercan las imágenes de la función (en el eje y), cuando las preimágenes se acercan al valor dado en el límite.

Esto nos ayudará a comprender mejor el concepto.

EJEMPLO 7. En la siguiente gráfica de la función f encuentre los límites o valores pedidos:

a) $f(-1)$

b) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

f) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

g) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

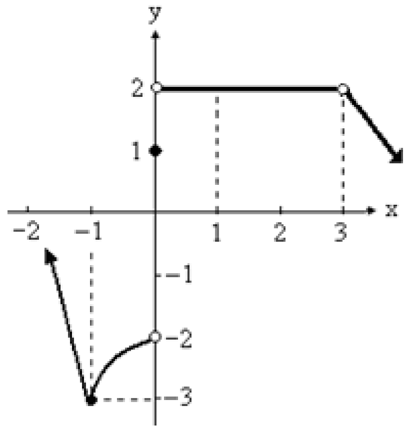
h) $f(0)$

i) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

j) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

k) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

l) $f(3)$



EJEMPLO 8. En la siguiente gráfica de la función f encuentre los límites o valores pedidos:

a) $f(-3)$

b) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$

f) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

g) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

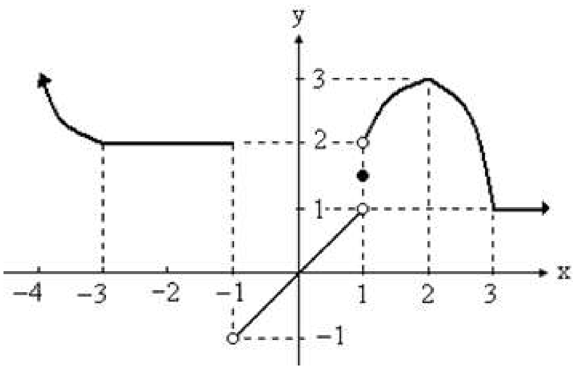
h) $f(-1)$

i) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

j) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

k) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

l) $f(1)$



Soluciones C.

Para resolver este ejemplo debemos analizar las gráficas en cada uno de los puntos dados.

- Cuando nos piden $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ debemos buscar a qué valores se acercan las imágenes $f(x)$ cuando x se acerca a a en valores menores que a.
- Cuando nos piden $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ debemos buscar a qué valores se acercan las imágenes $f(x)$ cuando x se acerca a a en valores mayores que a.
- Para establecer $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ debemos comprar los límites laterales. Si ambos existen y son iguales entonces, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ es ese valor en común, mientras que si alguno no existe o son diferentes el límite no existe.
- Para $f(a)$ debemos buscar la imagen correspondiente.

EJEMPLO 7.

a) -3
b) -3
c) -3
d) -3
e) -2
f) 2
g) No existe.
h) 1
i) 2
j) 2
k) 2
l) No existe.

EJEMPLO 8.

a) 2
b) 2
c) 2
d) 2
e) 2
m) No existe.
f) 2
g) 1
h) 2
i) $1,5$

Ejercicio C. En la siguiente gráfica de la función f encuentre los límites o valores pedidos:

1. $f(-4)$

2. $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x)$

3. $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x)$

4. $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$

5. $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$

6. $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

7. $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

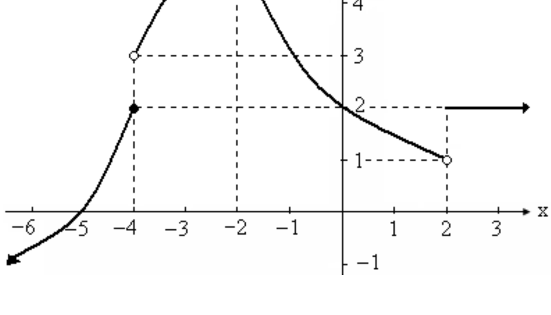
8. $f(-2)$

9. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

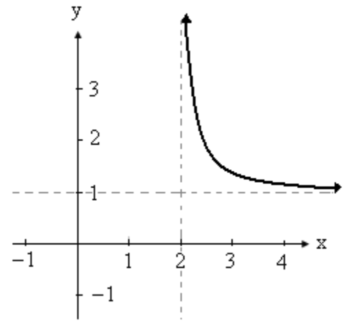
10. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

11. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

12. $f(2)$



D. Limites infinitos y límites al infinito (asíntotas)



Una **asíntota** es una recta a la cual la gráfica de una función, a partir de un punto, se acerca cada vez más pero nunca la toca. A manera de ejemplo, considere la función $f:]2,+\infty[\to \mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$, cuya gráfica es la siguiente:

Observe las siguientes tablas de valores:

x	y
2,1	11
2,01	101
2,0001	10 001
2,00001	100 001
2,000001	1 000 001

Consideramos preimágenes un poco mayores que 2. Es decir, los valores en "x" son cada vez más cercanos a 2 pero nunca llegaran a ser 2 porque esta función no está definida en 2. En este caso, los valores de las imágenes son cada vez más grandes al acercarse a 2 (mayores en magnitud y positivas).

Esto significa que la recta $x=2$ es una **asíntota vertical** de la función f.

En el eje y, la función va hacia $+\infty$ cuando en el eje x se acerca a 2 por la derecha. En notación de límites, tenemos un **límite infinito:** $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-1}{x-2}=+\infty$

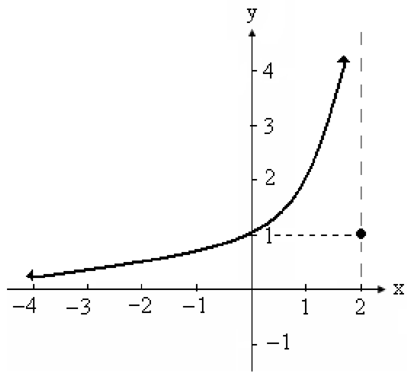
x	y
12	1,1
102	1,01
10 002	1,0001
100 002	1,00001
1 000 002	1,000001

Si consideramos preimágenes con valores cada vez más grandes, obtenemos imágenes cada vez más cercanas a 1, pero no existe una preimagen cuya imagen sea exactamente 1. Entonces, la recta $y=1$ es una **asíntota horizontal** de la función f.

Cuando los valores de "x" van hacia $+\infty$, es decir, son cada vez más grandes, sus respectivos valores de "y" son cada vez más cercanos a 1. En notación de límites, tenemos un **límite al infinito:** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x-2}=1$

- Las asíntotas se representan por líneas punteadas, salvo cuando son los ejes, ya que se sobreentiende que son asíntotas. Es importante recalcar que en el momento de encontrar el dominio o el ámbito de una función representada en una gráfica, las asíntotas deben tomarse en cuenta con especial cuidado.

EJEMPLO 9. Para la función f representada en la gráfica, encuentre la información solicitada:



a) Imagen de 2:

b) Preimágenes de 1:

c) Ecuación de las asíntotas:

d) Dominio

e) Ámbito:

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

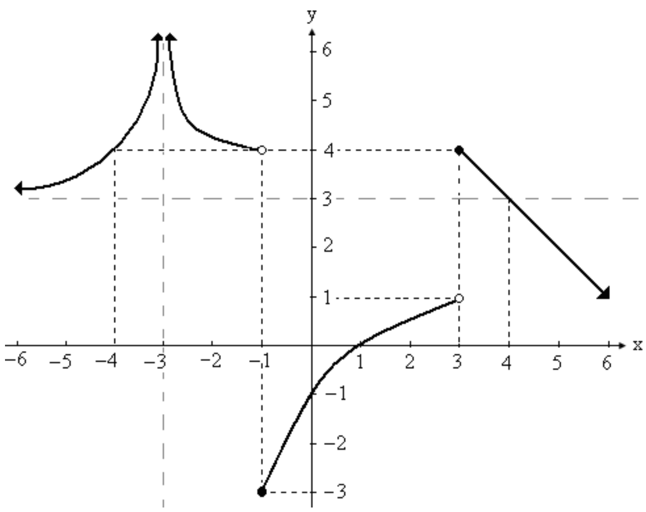
g) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

h) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

i) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

EJEMPLO 10. Para la función f representada en la gráfica, encuentre la información solicitada:

- **a)** **Ecuación de las asíntotas:**
- **b)** **Dominio:**
- **c)** **Ámbito:**
- **d)** $f(-3)$
- **e)** $f(-1)$
- **f)** $f(3)$
- **g)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
- **h)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
- **i)** $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x)$
- **j)** $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x)$
- **k)** $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$
- **l)** $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$
- **m)** $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)$
- **n)** $\lim\limits_{x\to3} f(x)$
- **o)** $\lim\limits_{x\to4} f(x)$



Soluciones D.

En este caso el análisis se hace de manera similar al de la sección anterior. En el caso de las asíntotas debemos aclarar que aunque la gráfica de la función se acerque y no toque a la asíntota, es posible redefinir la función en el punto donde no estaba definida.

Así es el caso de $x = 2$ en el ejemplo 9, donde la función fue redefinida de manera que $f(2) = 1$

EJEMPLO 9.

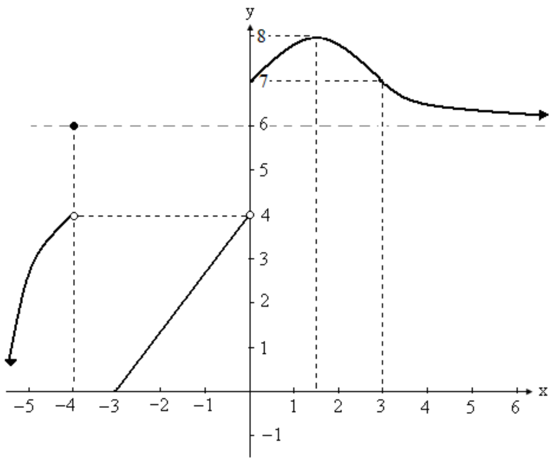
- **a)** 1
- **b)** 0 y 2
- **c)** $x = 2, y = 0$
- **d)** $]-\infty, 2]$
- **e)** $]0, +\infty[= \mathbb{R}^+$
- **f)** 0
- **g)** No existe.
- **h)** 1
- **i)** 1

EJEMPLO 10.

- **a)** $x = -3,\ y = 3$
- **b)** $\mathbb{R} - \{-3\}$
- **c)** $\mathbb{R}$
- **d)** No existe
- **e)** -3
- **f)** 4
- **g)** 3
- **h)** $-\infty$
- **i)** $+\infty$
- **j)** $+\infty$
- **k)** No existe
- **l)** 1
- **m)** No existe
- **n)** 3

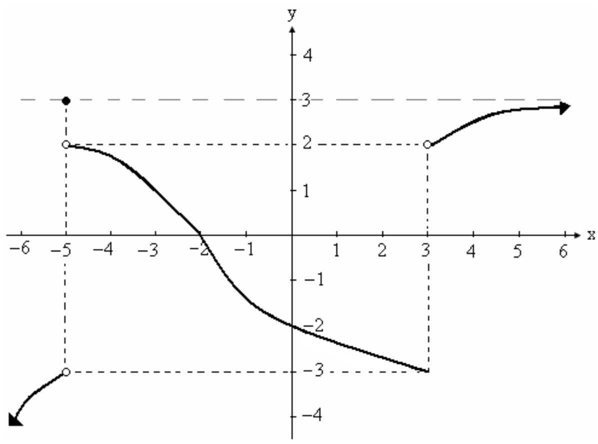
Ejercicio D. I PARTE: En las siguientes gráficas encuentre la información solicitada

Gráfica 1.



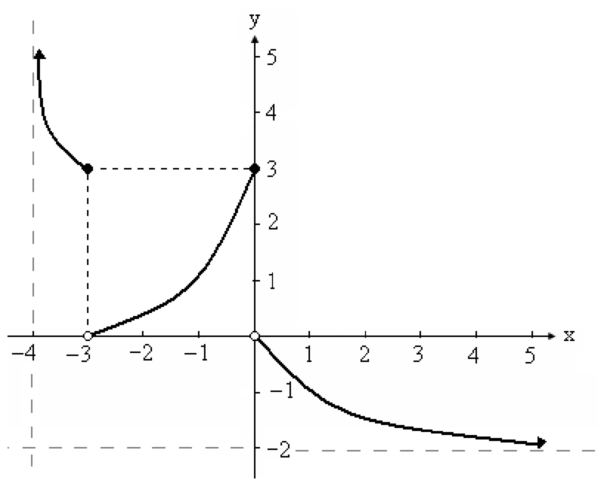
1. La ecuaciones de las asíntotas
2. El dominio
3. El ámbito
4. $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x)$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
6. $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$
7. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
8. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

Gráfica 2.



1. Las ecuaciones de las asíntotas
2. El dominio
3. El ámbito
4. $\lim\limits_{x \to -5^+} f(x)$
5. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
7. $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$
8. $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$

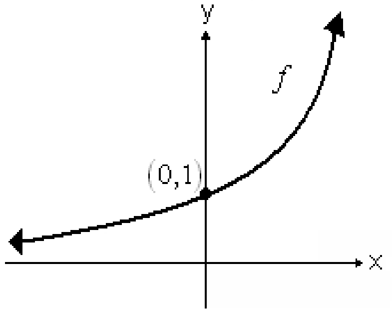
Gráfica 3



1. Las ecuaciones de las asíntotas
2. El dominio
3. El ámbito
4. $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x)$
5. $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x)$
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
7. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$
8. $f(0)$
9. $f(-3)$

II PARTE: En las siguientes gráficas se muestran algunas funciones comunes. Encuentre los límites pedidos:

$f(x) = e^x$

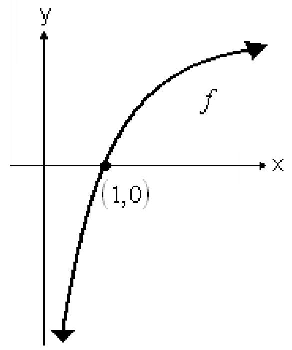


1. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$

2. $\lim\limits_{x\to 0} e^x$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$

$f(x) = \ln x$

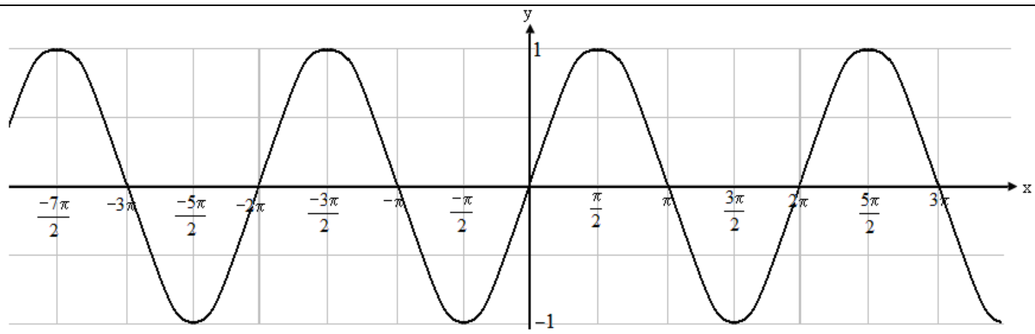


4. $\lim\limits_{x\to 0} \ln x$

5. $\lim\limits_{x\to 1} \ln x$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{sen} x$



7. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} x$

8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x$

9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$

10. $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{sen} x$

III PARTE: Buscando la gráfica de las funciones en cada caso, encuentre los límites pedidos:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \cos x$

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \cos x$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \tan x$

6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x$

7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x$

8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x$ con $0 < a < 1$

9. $\lim\limits_{x\to 0} \log_a x$ con $0 < a < 1$

10. $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x$ con $0 < a < 1$

11. $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x$ con $a > 1$

12. $\lim\limits_{x\to 0} \log_a x$ con $a > 1$

13. $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x$ con $a > 1$

14. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2$ con $a > 1$

15. $\lim\limits_{x\to 0} x^2$ con $a > 1$

16. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2$ con $a > 1$